Introduzione all’algebra di Boole

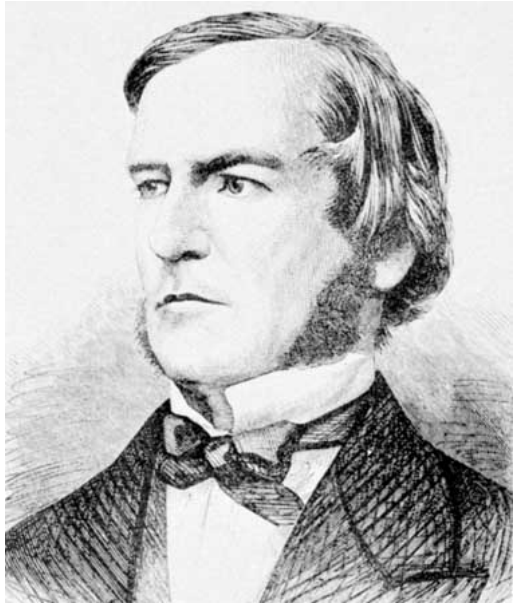
Concetto di logica

Esistono regole che sottostanno al ragionamento umano, o questo è una attività spontanea e casuale?

Come mai certi ragionamenti ci suonano corretti mentre altri ci sembrano palesemente errati?

A queste domande cercarono di dare risposta già i filosifi greci, Aristotele tra tutti.

A metà dell'Ottocento il matematico GEORGE BOOLE trovò una risposta:



- Il ragionamento umano è basato su PROPOSIZIONI
- Le proposizioni possono assumere due valori: VERO o FALSO

Esempi

1. "Modena si trova in Emilia Romagna"
2. "2 è un numero primo"
3. "L'informatica è bella"

Le frasi 1 e 2 sono proposizioni logiche, perché possiamo affermare con certezza che 1 è vera e 2. Ogni frase ha un valore di verità o falsità, nessuna ambiguità.

La frase 3 non è una proposizione logica perché è soggettiva.

Algebra di Boole

Boole individuò inoltre gli opertori elementari che legano le proposizioni:

ALGEBRA BOOLEANA

O

ALGEBRA DELLE PROPOSIZIONI

In Informatica, l'algebra di Boole trova **applicazioni in diversi settori:**

1. è la logica di cui si avvalgono i calcolatori per interpretare ed eseguire le istruzioni dei programmi
2. è la logica usata nella progettazione e per il funzionamento dei circuiti elettronici ed è quindi utilizzata nello studio dei sistemi elettronici digitali che fanno parte di un computer
4. nei linguaggi di programmazione, per esprimere scelte in base a dei criteri di selezione, nella sequenza di esecuzione delle istruzioni di un programma

Algebra di Boole (cont.)

ALGEBRA composta da

- un insieme di due simboli **B={0,1}**
- un insieme di operazioni **O={+,*,'}**
  - + somma logica
  - * prodotto logico
  - ' complementazione

Proprietà di chiusura: per ogni a, b $\in$B: $a+b \in B$

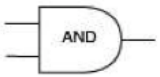
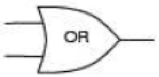
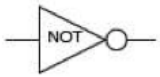
$a*b \in B$

$a' \in B$

COSTANTI dell'algebra: le costanti 0 ed 1

VARIABILE: un qualsiasi simbolo che *corrisponde ad una proposizione* e che può essere sostituito da una delle due costanti

ESEMPI di algebre di Boole

0	1	*	+	'
F	V	AND	OR	NOT
0	1			

Proprietà (assiomi) dell'algebra di Boole

Identità

(P1) $X + 0 = X$

(P1') $X * 1 = X$

Elementi nulli

(P2) $X + 1 = 1$

(P2') $X * 0 = 0$

Negazione

(P3) $1' = 0$

(P3') $0' = 1$

Involuzione

(P4) $(X ')' = X$

Proprietà commutativa

(P5) $X + Y = Y + X$

(P5') $X * Y = Y * X$

Proprietà associativa

(P6) $(X + Y) + Z = X + (Y + Z) = X + Y + Z$

(P6') $(X * Y) * Z = X * (Y * Z) = X * Y * Z$

Proprietà distributiva

(P7) $X * (Y + Z) = X * Y + X * Z$

(P7') $X + (Y * Z) = (X+Y) * (X + Z)$

Leggi di De Morgan generalizzabili per *n* variabili

(P7) $(X + Y)' = (X' * Y')$

(P7') $(X * Y)' = (X' + Y')$

Tabelle di verità degli operatori dell'algebra

x	y	x * y	x + y	x'
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

Espressioni Booleane

Un'**ESPRESSIONE BOOLEANA** è una stringa di elementi di B che rispetta le seguenti regole:

- ➜ una costante è un'espressione;
- ➜ una variabile è un'espressione;
- ➜ se X è un'espressione allora il complemento di X è un'espressione;
- ➜ se X,Y sono espressioni allora la somma logica di X e Y è un'espressione;
- ➜ se X,Y sono espressioni allora il prodotto logico di X e Y è un'espressione.

Per valutare una espressioni si costruisce la sua **TABELLA DI VERITÀ**

x1*x2*x3+x1*x1'

x1	x2	x3	x1*x2*x3+x1*x1'
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Funzioni Booleane

- Una **funzione che mette in relazione n-ple** *di variabili booleane*
- $f(x_{n-1},..., x_1,x_0)$ è l'insieme di tutte le possibili coppie formate da un elemento di B^n (dominio) e da un elemento di B (codominio).

- La **tabella di verità** è un tipico modo per descrivere una funzione dell'algebra di Boole.

ESEMPIO

Si può telefonare solo se la batteria è carica (x1) se c'è campo (x2) e se c'è credito (x3)

$$f(x1,x2,x3):BxBxB \rightarrow B$$

x1	x2	x3	f(x1,x2,x3)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Espressioni e Funzioni Booleane

TEOREMA ogni espressione di n variabili descrive una funzione completamente specificata ma non e' vero il contrario: per ogni funzione esistono più espressioni che la descrivono .

ESEMPIO L'espressione logica x1*x2*x3+x1*x1' corrisponde alla funzione booleana f(x1,x2,x3) e alla tabella di verità precedente. Ma anche l'espressione logica x1*x2*x3 corrisponde alla stessa funzione booleana.

ESPRESSIONI EQUIVALENTI

DUE ESPRESSIONI SI DICONO EQUIVALENTI SE ESPRIMONO LA STESSA FUNZIONE

Quindi un'espressione booleana più "complessa" può essere rimpiazzata da una espressione equivalente più "semplice".

Per costruire la tabella della verità di un'espressione booleana:

- semplificare l'espressione mediante le proprietà e i teoremi dell'algebra
- calcolare i termini parziali della funzione riducendoli alle operazioni fondamentali

Teoremi

Teorema dell'Idempotenza

- $X + X = X$
- $X * X = X$

Dimostrazione:

Dimostrabile da P1, P1', P2, P2'

Teorema della Complementarietà

- $X + X' = 1$
- $X * X' = 0$

Dimostrazione:

Dimostrabile da P1, P1', P2, P2' e teorema della negazione

Teorema dell'Assorbimento

- $X * (X + Y) = X + X * Y = X$

Dimostrazione:

Dimostrabile da P1, P1', P2, P2'

Teoremi della combinazione

- $X * Y + X' * Y = Y$

Dimostrazione:

$X * Y + X' * Y = Y * (X + X') = Y$

- $(X + Y) *(X'+ Y) = Y$

Dimostrazione:

$(X + Y) *(X'+ Y)$
$= (X+Y) * X'+ (X + Y) * Y$
$= X* X' + Y * X'+X* Y+ Y * Y$
$= 0 + Y + Y$
$=Y$

Teoremi del consenso

- $(X + Y) *(X' + Z) *(Y + Z) = (X + Y)*(X'+Z)$
- $X * Y + X' * Z + Y * Z = X * Y + X' * Z$

Esercizio

Calcolare la tabella di verità della funzione

$$F(a, b, c) = a \cdot b + c$$

a	b	c	$a \cdot b$	$a \cdot b + c$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Esercizi

Scrivere la tabella di verità delle seguenti funzioni booleane:

- `f(a,b,c)=(a'+c) a c'+b'`
- `f(a,b,c)=(a' b)+a+c`