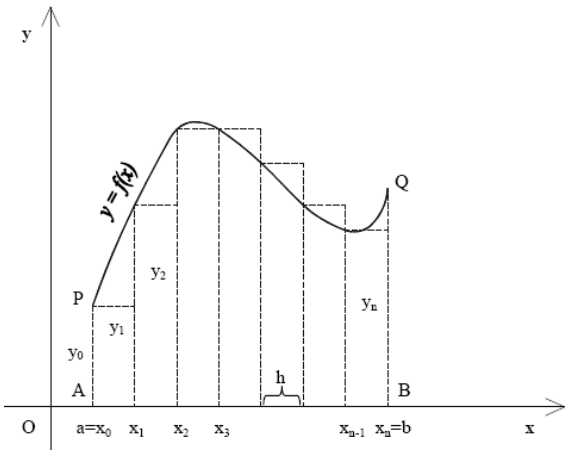
Integrazione numerica

L'idea

- **L'integrale è un calcolo di area:**
  - **si suddivide l'intervallo complessivo in un numero *n* opportuno di sottointervalli**
  - **si calcola l'area di ogni sottointervallo (base per altezza…)**
    - **si può iniziare supponendo ogni base costante ed uguale a Δx=(b-a)/*n***
    - **L'i-esima altezza è pari al valore $f(x_i)$**
  - **l'area totale può essere quindi approssimata dalla somma delle aree dei sottointervalli**



$$I = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x$$

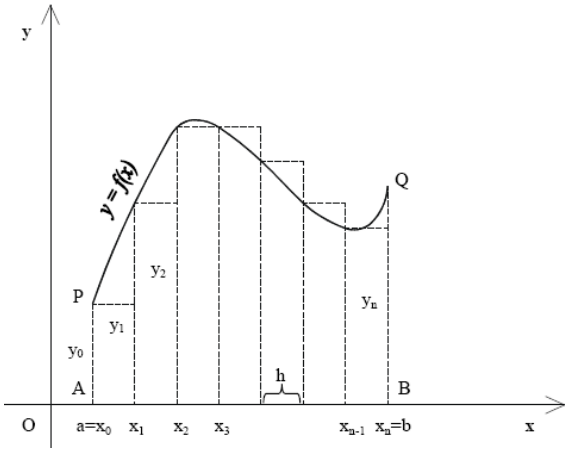
$$x_i = a + i\Delta x$$

- **Si pone n→∞,**
  (e quindi Δx→0)

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

L'idea

- **Problemi:**
  - **Il calcolo di f(x), quando la funzione non è un polinomio**
    - **sviluppo in serie**
  - **Una stima migliore per la «corretta» altezza del rettangolo**
    - **dare un peso ad ogni $f(x_i)$**
  - **Il limitato numero di punti disponibili**
    - **eseguire una interpolazione**

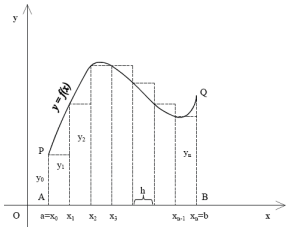


$$I = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x \quad \longrightarrow \quad I = \int_a^b f(x)dx$$

$$x_i = a + i\Delta x$$

- **Si pone n→∞,**
  (e quindi Δx→0)

L'idea



- **Problemi:**
  - **Il calcolo di f(x), quando la funzione non è un polinomio**
    - **sviluppo in serie**
  - **Una stima migliore per la «corretta» altezza del rettangolo**
    - **dare un peso ad ogni $f(x_i)$**
  - **Il limitato numero di punti disponibili**
    - **eseguire una interpolazione**

- **I tre punti in realtà hanno molto in comune**
  - **vedremo fra poco**

$$I = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x \quad \longrightarrow \quad I = \int_a^b f(x)dx$$

$$x_i = a + i\Delta x$$

- **Si pone n→∞,**
  (e quindi Δx→0)

Approssimazione di dati e di funzioni

- **In matematica, e in particolare in analisi numerica, per interpolazione si intende un metodo per individuare nuovi punti del piano cartesiano a partire da un insieme finito di punti dati, nell'ipotesi che tutti i punti si possano riferire ad una funzione f(x) di una data famiglia di funzioni di una variabile reale**

Definizione del problema

- **Sia data una sequenza di n numeri reali distinti x_k chiamati nodi e per ciascuno di questi sia dato un secondo numero y_k. Ci proponiamo di individuare una funzione di una certa famiglia tale che sia**

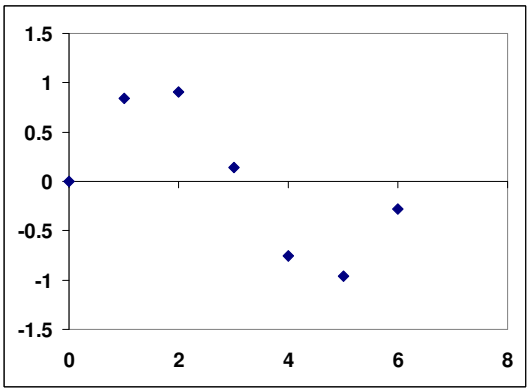
$$f(x_k) = y_k \quad k = 1, \ldots, n$$

(x_k, y_k) — **Punto dato (nodo)**

f — **Funzione interpolante**

Approssimazione di dati e di funzioni

0	0
1	0.841471
2	0.909297
3	0.14112
4	-0.7568
5	-0.95892
6	-0.27942



- **Ci chiediamo: quanto vale la funzione per esempio, in x=2.5?**
  - l'interpolazione risolve problemi come questo

- **Quanto è esatto il metodo?**
- **Quanto è costoso?**
- **Quanto è buona la funzione interpolante?**
- **Quanti punti dati sono necessari per procedere?**

Classi delle funzioni approssimanti

- **Prima di affrontare un qualsiasi problema di approssimazione occorre**
  - **Individuare la classe delle funzioni approssimanti**
  - **Adottare un criterio per la scelta di un particolare elemento**
- **Le classi più usate:**
  - **Polinomi algebrici di grado n** $$f_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$
  - **Polinomi trigonometrici di grado n e frequenza ω** $$f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)\right)$$
  - **Polinomi funzioni razionali** $$f_n(x) = \frac{P_n(x)}{P_d(x)}$$
  - **Somme esponenziali di ordine n** $$f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k e^{-b_k x}$$
  - **Spline di ordine n** **f(x) funzione spline di ordine n**

Classi delle funzioni approssimanti

- **Prima di affrontare un qualsiasi problema di approssimazione occorre**
  - **Individuare la classe delle funzioni approssimanti**
  - **Adottare un criterio per la scelta di un particolare elemento**
- **Le classi più usate:**
  - **Polinomi algebrici di grado n** $$f_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$
  - **Polinomi trigonometrici di grado n e frequenza ω** $$f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)\right)$$
  - **Polinomi funzioni razionali** $$f_n(x) = \frac{P_n(x)}{P_d(x)}$$
  - **Somme esponenziali di ordine n** $$f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k e^{-b_k x}$$
  - **Spline di ordine n** **f(x) funzione spline di ordine n**

Classi delle funzioni approssimanti

- **Prima di affrontare un qualsiasi problema di approssimazione occorre**
  - **Individuare la classe delle funzioni approssimanti**
  - **Adottare un criterio per la scelta di un particolare elemento**
- **Le classi più usate:**

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

$$f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)\right)$$

$$f_n(x) = \frac{P_n(x)}{P_d(x)}$$

$$f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k e^{-b_k x}$$

f(x) funzione spline di ordine n

- **Ovviamente, le funzioni di ogni gruppo con cui costruiamo la soluzione devono essere**
  - **linearmente indipendenti**
  - **base** dello spazio vettoriale di dimensione m

Criteri di scelta

- **Prima di affrontare un qualsiasi problema di approssimazione occorre**
  - **Individuare la classe delle funzioni approssimanti**
  - **Adottare un criterio per la scelta di un particolare elemento**
- **I criteri più usati:**
- **Interpolazione**
  - come funzione ***$f_n(x)$*** si prende l'elemento che soddisfa le condizioni

$$f_n(x_i) = y_i \qquad i = 0,1,\ldots,n$$

- **Minimi quadrati**
  - come funzione ***$f_n(x)$*** si prende l'elemento che minimizza la quantità

$$\sum_{i=0}^{m} w_i \left(f_n(x_i) - y_i\right)^2$$

- **Minimax**
  - come funzione ***$f_n(x)$*** si prende l'elemento che minimizza l'errore massimo

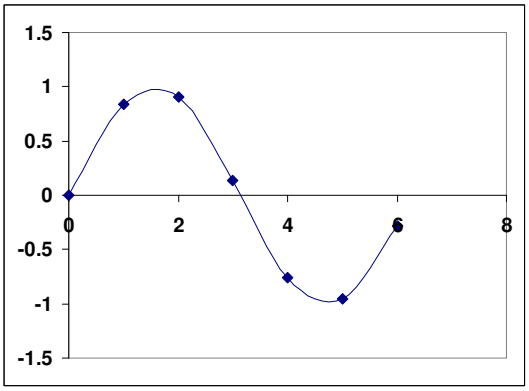
$$\max_{0 \le i \le m} \left| f_n(x_i) - y_i \right|$$

Interpolazione polinomiale: l'idea

- **Se l'interpolante lineare è una sequenza di funzioni lineari, nella interpolazione polinomiale si cerca come interpolante un unico polinomio di un grado opportuno**

$$(x_i, y_i)\, i = 0,1,\ldots,n \qquad y_i = f(x_i)$$

$$x_i \neq x_j \;\; per\; i \neq j \qquad x_i \in [a,b]$$



- **Poiché i punti sono *n+1*, è sufficiente considerare il generico polinomio (di grado n) che ha *n+1* coefficienti:**

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n$$

e porre le condizioni:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_{n+1} x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_{n+1} x_1^n = y_1 \\ \ldots \\ a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_{n+1} x_n^n = y_n \end{cases}$$

Polinomi di Lagrange

- **I parametri incogniti sono soluzione del sistema:**

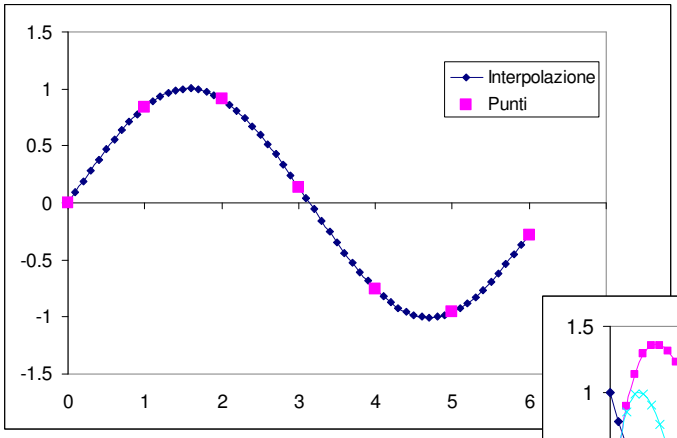
$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$$

- **Fatti i dovuti calcoli, il polinomio di interpolazione si può rappresentare nel seguente modo:**

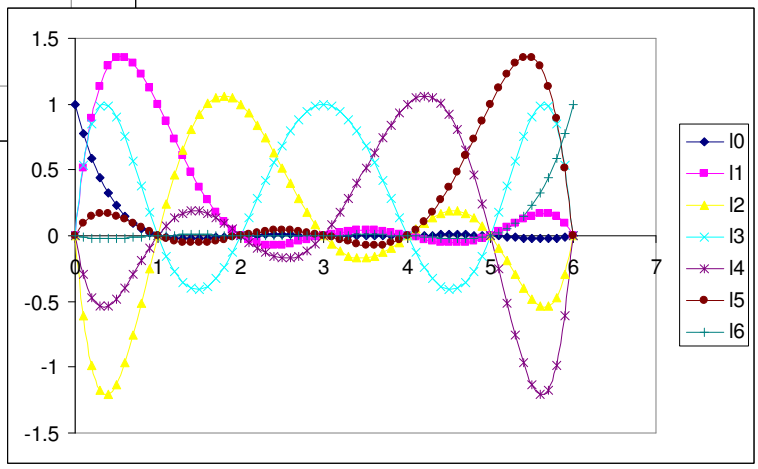
$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j l_j(x) \quad \textbf{con:} \quad l_j(x) = \frac{\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} (x_j - x_i)}$$

- ***$l_j(x)$* polinomi di Lagrange**

Polinomi di Lagrange



0	0
1	0.841471
2	0.909297
3	0.14112
4	-0.7568
5	-0.95892
6	-0.27942



***$l_j(x)$* polinomi di Lagrange :**

Errore nei polinomi di Lagrange

- **Si dimostra che l'errore di interpolazione E(x), ossia l'errore che si commette approssimando il valore della funzione col valore del polinomio si può stimare come**

$$E(x) = f(x) - P(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)f^{(n+1)}(\xi_x)$$

con ξ_x appartenente all'intervallo [a,b]

- **Posto** $$M_{n+1} = \max_{x\in[a,b]}\left(\left|f^{(n+1)}(x)\right|\right)$$

- **Risulta essere**

$$|E(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)\right|$$

Questa formula è utile per stimare il numero di nodi necessari ad ottenere un errore di interpolazione minore di una data tolleranza massima

Alcuni commenti

- **In generale, se abbiamo n punti dati, esiste esattamente un polinomio di grado n−1 che passa attraverso tutti i punti dati**
  - l'errore di interpolazione è proporzionale alla distanza fra i punti dati alla potenza n
  - l'interpolante essendo un polinomio è illimitatamente differenziabile

- **Tuttavia questo metodo presenta alcuni svantaggi**
  - Il calcolo che porta ai coefficienti del polinomio d'interpolazione è molto "costoso" (in termini di tempo di esecuzione richiesto al calcolatore e in termini di complessità delle elaborazioni)
  - inoltre, l'interpolazione polinomiale per il complesso dei valori dalla variabile indipendente non si rivela molto esatta; questo accade, in particolare, nei punti estremi (fenomeno di Runge)
  - Questi svantaggi possono essere evitati usando altri metodi dell'interpolazione (spline o razionale col metodo Floater Hormann)

- **Se imponiamo al polinomio interpolatore di passare per i nodi avendo in essi una determinata derivata, si ottiene la formula di interpolazione di Hermite**

Integrazione numerica

- **L'obiettivo è calcolare numericamente un integrale del tipo:**

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

dove *f(x)* è una funzione reale

- **Con le formule di integrazione numerica è possibile trattare anche funzioni con singolarità o funzioni i cui valori sono noti solo in un insieme discreto di punti in [a, b]**

Integrazione numerica

- **In formule di quadratura del tipo:**

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$$

- **gli $x_i \in [a, b]$, $i = 1, 2 \ldots n$ sono i nodi della formula e a_i, $i = 1, 2 \ldots n$ sono i coefficienti (o pesi) della formula**

$$R_n(f) = I(f) - S_n(f)$$

- **è il resto della formula di quadratura**

Integrazione numerica

- **Definizione La formula ha grado di precisione l se $R_n(f)=0$ quando:**

$$f(x) = x^k \quad k = 0, \ldots, l$$
$$R_n(f) \neq 0 \; se \; f(x) = x^{l+1}$$

ossia essa è esatta quando la funzione integranda $f(x)$ è un polinomio qualsiasi di grado $\leq l$ ed inoltre esiste almeno un polinomio di grado $l+1$ per cui l'errore $R_n(f)$ risulta non nullo

Integrazione polinomiale

- **Il calcolo numerico di:**

$$I(f)=\int_a^b \omega(x)f(x)dx$$

- **con *ω(x)* funzione peso consiste nel sostituire alla funzione f(x) un polinomio p(x) che la approssimi e quindi considerare l'integrale**

$$I(f)=\int_a^b \omega(x)p(x)dx$$

come una approssimazione del precedente

- **Il polinomio può essere ottenuto mediante interpolazione**
  - **vedi slide precedenti…**

Integrazione polinomiale

- **Formula di quadratura per calcolare numericamente:**

$$I(f)=\int_a^b \omega(x)f(x)dx$$

- **Teorema. Assegnati n punti distinti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si possono determinare *n* coefficienti $a_1, a_2, \ldots a_n$ in modo che la formula**

$$I(f)=\int_a^b \omega(x)f(x)dx=\sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)+R_n(f)$$

sia esatta ($R_n(f)=0$) quando *f(x)* è un polinomio di grado non superiore a *n-1*

- **non è richiesto che i punti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ siano interni all'intervallo [a,b]**

Formule di Newton-Cotes

- **Le formule di Newton-Cotes sono un gruppo di formule adoperate nell'integrazione numerica (detta anche quadratura) che si basano sulla valutazione dell'integrando in n+1 punti equidistanti**
  - Le formule sono chiamate così in onore di Isaac Newton e Roger Cotes
  - Le formule di Newton-Cotes possono essere utili se il valore dell'integrando nei punti equidistanti è noto
- **Si assume che il valore di una funzione f è noto nei punti equidistanti x_i, per $i = 0, \ldots, n$**

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= a \\ x_2 &= a + h \\ &\ldots \\ x_n &= a + (n-1)h \end{aligned}}$$

- **Esistono due tipi di formule di Newton-Cotes**
  - la forma "chiusa", che valuta il valore della funzione in tutti i punti
  - la forma "aperta", che non considera i valori della funzione nei suoi estremi

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \qquad \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n-1} w_i f(x_i)$$

Formule di Newton-Cotes

- **I pesi w_i provengono dai polinomi di Lagrange. Ciò significa che dipendono solo dalle x_i e non dalla funzione *f***
- **Sia *L(x)* il polinomio di Lagrange di interpolazione per i punti noti $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$; allora:**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b l_i(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) w_i$$

- **Le formule di Newton-Cotes si possono ricavare per qualsiasi grado n**
  - Tuttavia, per n molto grandi, la formula può risentire del fenomeno di Runge, dove l'errore cresce in maniera esponenziale se n è elevato
  - In tal caso si adottano solitamente metodi molto stabili, come ad esempio la quadratura di Gauss con punti di integrazione non equidistanti
  - Il fenomeno di Runge può essere evitato usando una formula composta

Formule di Newton-Cotes

Formule di Newton-Cotes chiuse

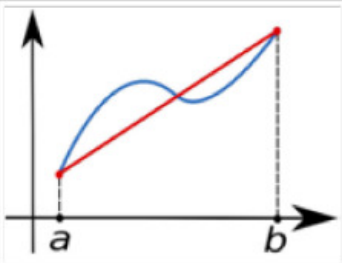
Grado	Nome comune	Formula	Termine d'errore
1	Regola del trapezio	$\frac{h}{2}(f_0 + f_1)$	$-\frac{h^3}{12} f^{(2)}(\xi)$
2	Regola di Cavalieri-Simpson	$\frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$	$-\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$
3	Regola di Cavalieri-Simpson (con fattore 3/8)	$\frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$	$-\frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi)$
4	Regola di Boole	$\frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4)$	$-\frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\xi)$

- **Nota bene: la notazione f_i è un'abbreviazione di $f(x_i)$**

Regola del trapezio

- **La regola del trapezio, nella sua formulazione elementare, propone di approssimare l'integrale, cioè l'area della regione piana compresa fra il grafo della funzione *f(x)* e l'asse delle ascisse con l'area del trapezio di vertici**

  (a,f(a)), (b,f(b)), (b,0), (a,0)



Regola del trapezio.

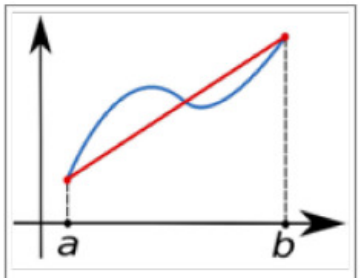
- **Di conseguenza:**

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

- **Come è intuitivo questa approssimazione è accettabile se nell'intervallo di integrazione la funzione ha un andamento che si scosta poco dal lineare**

Formule composte

- **Per ottenere una certa accuratezza dalle formule di Newton-Cotes, il passo h deve essere piccolo**
  - **ciò significa che l'intervallo di integrazione [a,b] dovrà essere anch'esso piccolo, il che non è sempre vero**



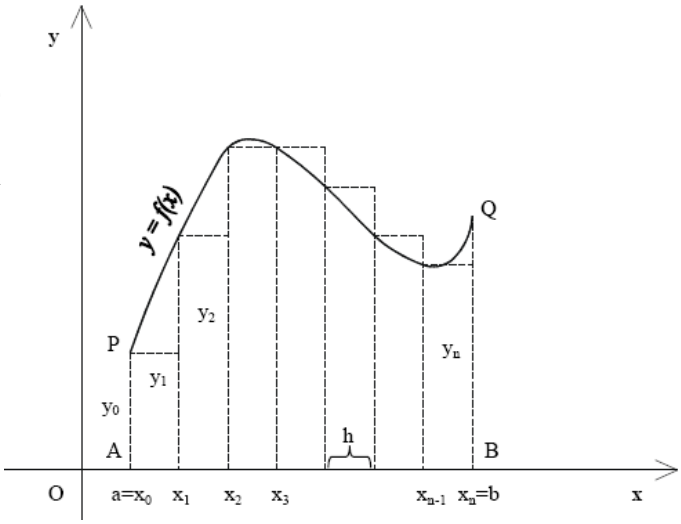
Regola del trapezio.

- **Per questo motivo, di solito si sceglie di calcolare l'integrale dividendo l'intervallo [a,b] in tanti piccoli sottointervalli, ai quali si applicano di volta in volta le formule di Newton-Cotes, e sommando poi i risultati**

- **Questo procedimento è chiamato formula composta**

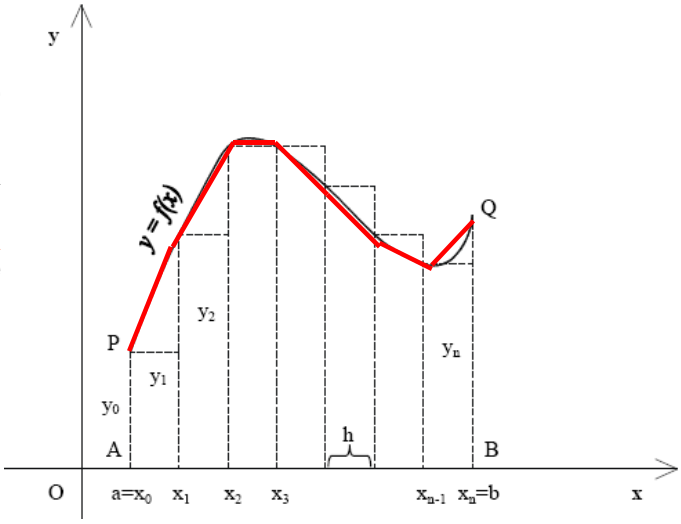
Regola del trapezio composta

- **Quindi:**
  - **si suddivide l'intervallo complessivo in un numero n opportuno di sottointervalli in ciascuno dei quali in genere accade che la funzione ha andamento poco lontano dal lineare**



Regola del trapezio composta

- **Quindi:**
  - **si suddivide l'intervallo complessivo in un numero n opportuno di sottointervalli in ciascuno dei quali in genere accade che la funzione ha andamento poco lontano dal lineare**
  - **la regola del trapezio nella forma composta dice di applicare l'approssimazione precedente a tutti i sottointervalli**
- **Si ottiene quindi la formula:**



$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

Regola del trapezio composta (semplici conti)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{n}\left(\begin{array}{l}\frac{f(a)+f(a+h)}{2}+\frac{f(a+h)+f(a+2h)}{2}\\ +\frac{f(a+2h)+f(a+3h)}{2}+\ldots+\frac{f(a+(n-1)h)+f(a+nh)}{2}\end{array}\right)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{n}\left(\begin{array}{l}\frac{f(a)}{2}+2\frac{f(a+h)}{2}+2\frac{f(a+2h)}{2}\\ +2\frac{f(a+3h)}{2}+\ldots+2\frac{f(a+(n-1)h)}{2}+\frac{f(b)}{2}\end{array}\right)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(a+(n-1)h)\right)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

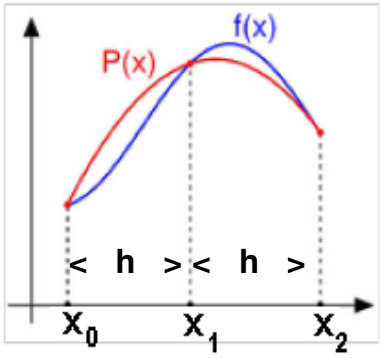
Formula delle parabole (o di Cavalieri-Simpson)

- **La regola di Cavalieri-Simpson prevede la suddivisione della funzione integranda mediante archi di parabola, cioè mediante polinomi quadratici**

$$y(x) = A(x - x_1)^2 + B(x - x_1) + C$$

passanti per i punti

$$(x_0, y_0 := f(x_0)), (x_1, y_1 := f(x_1)), (x_2, y_2 := f(x_2))$$



La regola di Cavalieri-Simpson approssima l'integrale della funzione richiesta (in blu) con quello della parabola che la interpola nei nodi (in rosso)

Formula delle parabole (o di Cavalieri-Simpson)

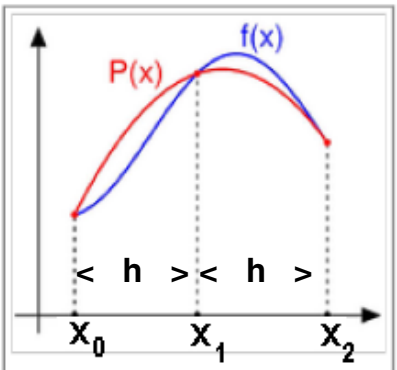
- **La regola di Cavalieri-Simpson prevede la suddivisione della funzione integranda mediante archi di parabola, cioè mediante polinomi quadratici**

$$y(x) = A(x - x_1)^2 + B(x - x_1) + C$$

passanti per i punti

$$(x_0, y_0 := f(x_0)), (x_1, y_1 := f(x_1)), (x_2, y_2 := f(x_2))$$

$$\begin{cases} y_0 = A(x_0 - x_1)^2 + B(x_0 - x_1) + C \\ y_1 = C \\ y_2 = A(x_2 - x_1)^2 + B(x_2 - x_1) + C \end{cases}$$

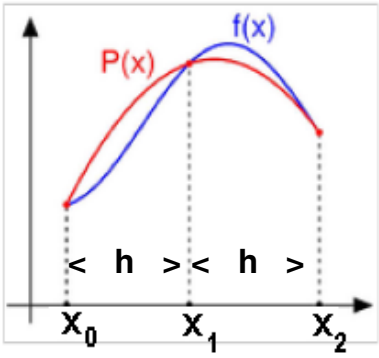


La regola di Cavalieri-Simpson approssima l'integrale della funzione richiesta (in blu) con quello della parabola che la interpola nei nodi (in rosso)

Formula delle parabole (o di Cavalieri-Simpson)

$$\begin{cases} A = \dfrac{y_0 + y_2 - 2y_1}{2h^2} \\ B = \dfrac{y_2 - y_0}{2h} \\ C = y_1 \end{cases}$$

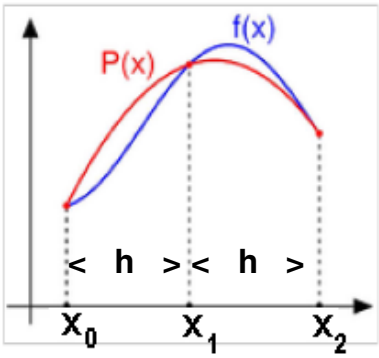
$$\begin{cases} y_0 = A(x_0 - x_1)^2 + B(x_0 - x_1) + C \\ y_1 = C \\ y_2 = A(x_2 - x_1)^2 + B(x_2 - x_1) + C \end{cases}$$



La regola di Cavalieri-Simpson approssima l'integrale della funzione richiesta (in blu) con quello della parabola che la interpola nei nodi (in rosso)

Formula delle parabole (o di Cavalieri-Simpson)

$$\begin{cases} A = \dfrac{y_0 + y_2 - 2y_1}{2h^2} \\ B = \dfrac{y_2 - y_0}{2h} \\ C = y_1 \end{cases}$$



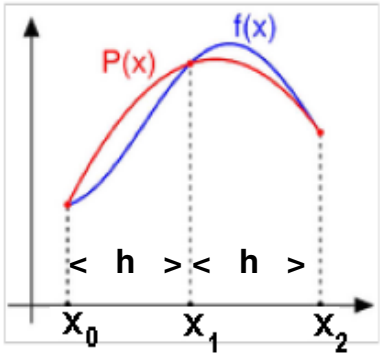
La regola di Cavalieri-Simpson approssima l'integrale della funzione richiesta (in blu) con quello della parabola che la interpola nei nodi (in rosso)

$$\int_{x_0}^{x_2} \left[A(x - x_1)^2 + B(x - x_1) + C \right] dx =$$

$$= A\left[\frac{(x - x_1)^3}{3}\right]_{x_0}^{x_2} + B\left[\frac{(x - x_1)^2}{2}\right]_{x_0}^{x_2} + C\left[x - x_1\right]_{x_0}^{x_2} = \boxed{\frac{2Ah^3}{3} + 2Ch}$$

Formula delle parabole (o di Cavalieri-Simpson)

$$\boxed{J = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)}$$



La regola di Cavalieri-Simpson approssima l'integrale della funzione richiesta (in blu) con quello della parabola che la interpola nei nodi (in rosso)

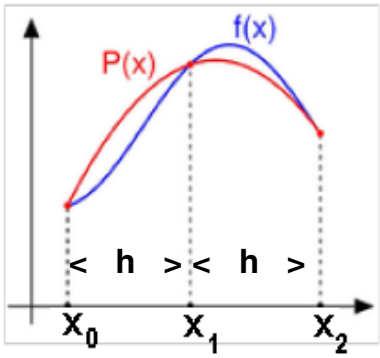
$$\int_{x_0}^{x_2} \left[A(x-x_1)^2 + B(x-x_1) + C\right]dx =$$

$$= A\left[\frac{(x-x_1)^3}{3}\right]_{x_0}^{x_2} + B\left[\frac{(x-x_1)^2}{2}\right]_{x_0}^{x_2} + C\left[x-x_1\right]_{x_0}^{x_2} = \boxed{\frac{2Ah^3}{3} + 2Ch}$$

Formula delle parabole (o di Cavalieri-Simpson) composta

$$J = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

… ripetendo per tutti gli intervallini …



La regola di Cavalieri-Simpson approssima l'integrale della funzione richiesta (in blu) con quello della parabola che la interpola nei nodi (in rosso)

$$\boxed{J = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)}$$

Errori

- Il metodo di quadratura, come ogni metodo di approssimazione numerica, è suscettibile di errori
  - un errore è dovuto alla sostituzione della funzione integranda con una sequenza di funzioni approssimanti
  - altri errori sono dovuti all'arrotondamento dei valori che vengono concretamente calcolati con strumenti che inevitabilmente operano con precisione limitata
- Dell' errore può essere molto utile conoscere una maggiorazione
  - la valutazione accurata di tale maggiorazione spesso non è semplice, poiché richiede di calcolare le derivate successive della funzione integranda
  - per funzioni note empiricamente la valutazione delle derivate costituisce di per se un problema di calcolo approssimato tendenzialmente oneroso

Errori

- Il metodo di quadratura, come ogni metodo di approssimazione numerica, è suscettibile di errori
  - un errore è dovuto alla sostituzione della funzione integranda con una sequenza di funzioni approssimanti
  - altri errori sono dovuti all'arrotondamento dei valori che vengono concretamente calcolati con strumenti che inevitabilmente operano con precisione limitata
- Dell' errore può essere molto utile conoscere una maggiorazione
  - la valutazione accurata di tale maggiorazione spesso non è semplice, poiché richiede di calcolare le derivate successive della funzione integranda
  - per funzioni note empiricamente la valutazione delle derivate costituisce di per se un problema di calcolo approssimato tendenzialmente oneroso

- In genere per la valutazione dell'errore si preferisce ricorrere a metodi empirici: il più noto e utilizzato è il metodo del dimezzamento del passo
  - Se due approssimazioni di un integrale, di cui la seconda ottenuta dimezzando il passo di integrazione utilizzato per calcolare la prima, coincidono per le prime r cifre decimali, tali cifre si possono ritenere esatte

Errori

- **Attenzione: procedendo con la riduzione dell'ampiezza dei sotto-intervalli, oltre al maggior tempo di calcolo richiesto, si possono avere errori di arrotondamento tutt'altro che trascurabili a causa dell'aumento del numero di operazioni richieste**
  - **si può anche arrivare a situazioni che vedono aumentare l'errore complessivo con il ridursi del passo di integrazione**
  - **per tale motivo sono stati concepiti dei metodi di integrazione numerica "adattivi" (o adattativi) che aumentano il numero dei sotto-intervalli solo nelle zone indicate da un apposito test di errore**

- **In genere per la valutazione dell'errore si preferisce ricorrere a metodi empirici: il più noto e utilizzato è il metodo del dimezzamento del passo**
  - **Se due approssimazioni di un integrale, di cui la seconda ottenuta dimezzando il passo di integrazione utilizzato per calcolare la prima, coincidono per le prime r cifre decimali, tali cifre si possono ritenere esatte**